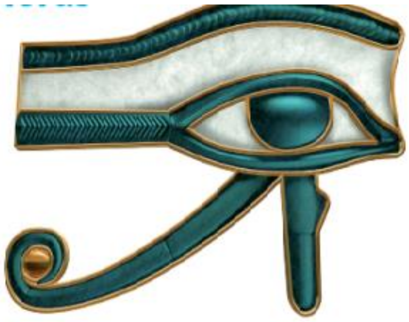
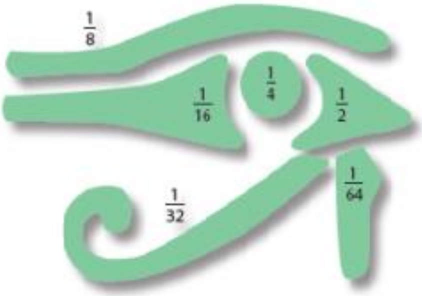
FRACȚII ORDINARE

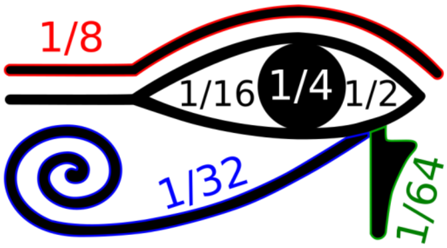


Ochiul lui Horus – legenda egipteană

O parte dintre legendele vechi egiptene spun că Osiris a fost primul rege al Egiptului. Era iubit de popor și se bucura de protecția zeului Toth. Invidios, fratele său, Seth, l-a ucis. Pentru a-și răzbuna tatăl, Horus, fiul lui Osiris, l-a înfruntat pe unchiul său. În timpul luptei, Seth i-a scos un ochi, l-a tăiat în bucăți și l-a aruncat în Nil. Zeul Toth a aruncat un năvod și a recuperate ochiul, cu excepția unei bucăți. Prin puterile sale miraculoase, Toth a înlocuit bucata care lipsea și astfel ochiul lui Horus a funcționat din nou.

Fragmentele ochiului lui Horus au fost asociate cu fracțiile următoare:





Scribii le-au utilizat pentru a indica fracțiuni din *obroc*, unitate de măsură pentru măsurarea cerealelor, citricelor sau pentru măsurarea ingredientelor din medicamente și pigmenți.

În cele mai multe scrieri antice egiptene s-au folosit unitățile fracționare (fracții cu numărătorul 1), numite fracții alicote..

Dacă voiau să exprime fracția $\frac{3}{4}$ se scria $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$. Este interesant de observat că adunând fracțiile nu se obține un întreg, ci $\frac{63}{64}$. Unii sugerează că restul de $\frac{1}{64}$ reprezintă magia folosită de Toth pentru a restabili ochiul, în timp ce alții consideră că piesa lipsă spune că perfecțiunea nu este posibilă.

Papirusul Rhind conține tabele cu fracțiile ochiului lui Horus.

https://ro.wikipedia.org/wiki/Ochiul_lui_Horus

Recapitulare:

https://www.geogebra.org/m/RkEcrPSg

https://www.manuale.edu.ro/

Probleme propuse:

1. Determinați numărul fracțiilor de forma $\frac{\overline{ab}+9}{\overline{ba}}, a>b$ care au proprietatea că diferența dintre numărător și numitor este cub perfect.

2. Determinați numerele naturale x și y astfel încât:

a) $\frac{5}{(x+1)(y-2)}$ să fie fracție echiunitară; b) $\frac{5}{(x-1)(y+2)}$ să fie fracție supraunitară;

3. Ancuța scrie pe tablă toate fracțiile ireductibile de forma $\frac{x}{10}$ cu proprietatea că $x|10$, colega ei Maria scrie toate fracțiile ireductibile de forma $\frac{10}{y}$ cu proprietatea că $y|10$ iar Bogdan scrie toate fracțiile ireductibile de forma $\frac{x}{y}$, unde x și y sunt numerele colegelor lui. Câte fracții subunitare diferite sunt scrise pe tablă?

4. Arătați că următoarele fracții se pot simplifica:

a) $\frac{n^2-n}{5n-5}, (n\in\mathbb{N}, n>1)$;

b) $\frac{2n+6}{n^2-n}, (n\in\mathbb{N}, n>1)$;

c) $\frac{10^n-1}{30}$, $(n\in\mathbb{N})$;

d) $\frac{987698769876}{432043204320}$;

e) $\frac{3+3^3+3^5+...+3^{155}}{91}$;

f) $\frac{9^{40}-7^{40}}{70}$;

g) $\frac{2^{n+1}\cdot 3^n+2^n\cdot 3^{n+1}+6^n}{2^{n+2}\cdot 3^{n+2}+5\cdot 6^{n+1}}, n\in\mathbb{N}$

5. Să se afle numerele naturale n pentru care următoarele fracții să fie numere naturale:

a) $\frac{12}{2n-1}$; b) $\frac{n+5}{n+2}$; c) $\frac{2n+3}{3n+2}$

6. Să se determine numerele naturale p și q astfel încât $\frac{5^{p+1}+3}{5^q-5^p}=2$.

7. Arătați că:

a) $\frac{2}{3}<\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}<2$; b) $\frac{5}{12}<\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+...+\frac{1}{24}<\frac{2}{3}$;

8. Dacă $\frac{2020}{a}+\frac{2020}{b+1}+\frac{2020}{c+2}=2020$, calculați $\frac{a+1}{a}+\frac{b+2}{b+1}+\frac{c+3}{c+2}$

9. a) Arătați că $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$;

b) Arătați că $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}=\frac{k}{n(n+k)}$;

c) Calculați: $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{110}$;

d) Calculați: $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{2019\cdot 2021}$;

10. Fie a și b numere natural nenule, care verifică egalitatea: $\frac{a}{b}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{15}$. Demonstrați că $(a-b)\vdots 17$

11. Ordonați crescător $a=x^2, b=xy, c=y^2$, unde $x=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot...\cdot\frac{2021}{2022}$ și $y=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot...\cdot\frac{2020}{2021}$

12. Fie fracția $A=\frac{1212}{2020}$;

a) Scrieți fracția ordinară A în formă ireductibilă;

b) Câte fracții cu rezultat număr natural sunt printre fracțiile $A, 2A, 3A, ...2021A$.

13. Calculați $S=\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+...+\frac{1}{1+2+3+4+...+2020}$.

14. Egiptenii priveau numerele fracționare ca pe niște numere aparte, care reprezentau o anumită parte a unității. Ei utilizau fracții alicote, adică fracții de forma $\frac{1}{n}, n\geq 2$ unde n este un număr natural (fracții cu numărătorul 1) . Descompuneau celelalte fracții în sumă de fracții alicote.

a) Calculați $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$;

b) Scrieți numărul 1 ca sumă de 12 fracții alicote diferite;

c) Poate fi scris numărul 1 ca sumă de fracții alicote cu numitori numere prime distincte?

Soluție ex.1:

$\overline{ab}+9-\overline{ba}=10a+b+9-10b-a=9a-9b+9=9(a-b+1)$

Rezultă $a-b+1$ are forma $3k^3$, adică $3\cdot 1, 3\cdot 8, 3\cdot 27, ...$ Convine $a-b+1=3 \Leftrightarrow a-b=2 \Rightarrow 7$ soluții

Soluție ex.2:

a) $\frac{5}{(x+1)(y-2)}$ - fracție echiunitară $\Rightarrow (x+1)(y-2)=5 \Rightarrow \begin{cases} x+1=5, y-2=1 \\ x+1=1, y-2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4, y=3 \\ x=0, y=7 \end{cases}$

b) $\frac{5}{(x-1)(y+2)}$ - fracție supraunitară

$$\Rightarrow (x-1)(y+2)<5 \Rightarrow \begin{cases} x-1=1, y+2=4 \\ x-1=4, y+2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2, y=2 \\ x=5, y=nu\ convine \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-1=1, y+2=3 \\ x-1=3, y+2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2, y=1 \\ x=4, y=nu\ convine \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-1=2, y+2=2 \\ x-1=3, y+2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3, y=0 \\ x=4, y=nu\ convine \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-1=1, y+2=2 \\ x-1=2, y+2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2, y=0 \\ x=3, y=nu\ convine \end{cases}$$

$$\{x-1=1, y+2=1 \Rightarrow \{x=2, y=nu\ convine$$

Soluție ex.3:

Ancuța scrie pe tablă următoarele fracții subunitare de forma $\frac{x}{10}$ cu proprietatea că $x|10$

$\Rightarrow \frac{1}{10}, \frac{2}{10}=\frac{1}{5}, \frac{5}{10}=\frac{1}{2}$,

colega ei Maria nu scrie fracții subunitare, iar Bogdan , printre fracțiile scrise, fracție subunitară diferită de cele scrise este $\frac{2}{5}$, deci sunt scrise 4 fracții conform cerinței.

Soluție ex.4:

a) $\dfrac{n^2-n}{5n-5}=\dfrac{n(n-1)^{(n-1}}{5(n-1)}=\dfrac{n}{5}$

b) După efectuarea factorului comun observăm că numărătorul și numitorul sunt numere pare, deci fracția se simplifică cu 2: $\dfrac{2n+6}{n^2-n}=\dfrac{2(n+3)}{n(n-1)}$;

c) Cum $10^n-1=\underset{n\ ori}{99...9}$, fracția se simplifică cu 3;

d) $\dfrac{987698769876}{432043204320}=\dfrac{9876\cdot 1001001}{4320\cdot 1001001}$

e) $\dfrac{3+3^3+3^5+...+3^{155}}{91}=\dfrac{(3+3^3+3^5)+...+(3^{151}+3^{153}+3^{155})}{91}=\dfrac{273(1+3^6+...+3^{150})^{(91}}{91}$

f) Cum ultima cifră a diferenței $9^{40}-7^{40}$ este 0, fracția se simplifică cu 10;

g) $\dfrac{2^{n+1}\cdot 3^n+2^n\cdot 3^{n+1}+6^n}{2^{n+2}\cdot 3^{n+2}+5\cdot 6^{n+1}}=\dfrac{6^n\cdot 2+6^n\cdot 3+6^{n}}{6^{n+2}+5\cdot 6^{n+1}}^{(6^n}$

Soluție ex.5:

a) $2n-1\in D_{12}=\{1,2,3,4,6,12\}\Leftrightarrow n\in\{1,2\}$

b) $\dfrac{n+5}{n+2}=\dfrac{n+2+3}{n+2}=1+\dfrac{3}{n+2}\Rightarrow n+2\in D_3=\{1,3\}\Rightarrow n=1$

c) $\dfrac{2n+3}{3n+2}\in \mathbb{N}\Rightarrow 3\cdot\dfrac{2n+3}{3n+2}\in\mathbb{N}\Leftrightarrow \dfrac{6n+9}{3n+2}=\dfrac{6n+4+5}{3n+2}=2+\dfrac{5}{3n+2}\Rightarrow n=1$

Soluție ex.6:

$\dfrac{5^{p+1}+3}{5^q-5^p}=2\Leftrightarrow 5^{p+1}+3=2(5^q-5^p)$. Cum ultima cifră a numerelor din cei doi membrii ai egalitățile diferă $\Rightarrow p=0\Rightarrow 8=2(5^q-1)\Rightarrow q=1$

Soluție ex.7:

a) Știm că $\dfrac{1}{6}<\dfrac{1}{3}\le\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{6}<\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{6}<\dfrac{1}{5}<\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{6}\le\dfrac{1}{6}<\dfrac{1}{3};$ și adunând relațiile de același tip obținem

$\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}<\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}<\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow\dfrac{2}{3}<\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}<\dfrac{4}{3}<2$

b) Știm că $\dfrac{1}{24}<\dfrac{1}{15}\le\dfrac{1}{15};\dfrac{1}{24}<\dfrac{1}{16}<\dfrac{1}{15};...\dfrac{1}{24}\le\dfrac{1}{24}<\dfrac{1}{15}$ și adunând relațiile de același tip obținem

$\dfrac{1}{24}+\dfrac{1}{24}+...+\dfrac{1}{24}<\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{16}+...+\dfrac{1}{24}<\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{15}+...+\dfrac{1}{15}\Leftrightarrow\dfrac{10}{24}<\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}<\dfrac{10}{15}$

$\Leftrightarrow\dfrac{5}{12}<\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}<\dfrac{2}{3}$

Soluție ex.8:

$\dfrac{2020}{a}+\dfrac{2020}{b+1}+\dfrac{2020}{c+2}=2020\Leftrightarrow 2020\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+1}+\dfrac{1}{c+2}\right)=2020\Leftrightarrow\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+1}+\dfrac{1}{c+2}=1$

$\Rightarrow\dfrac{a+1}{a}+\dfrac{b+2}{b+1}+\dfrac{c+3}{c+2}=\dfrac{a+1}{a}+\dfrac{b+1+1}{b+1}+\dfrac{c++2+1}{c+2}=1+\dfrac{1}{a}+1+\dfrac{1}{b+1}+1\dfrac{1}{c+2}=3+2020=2023$

Soluție ex.9:

a) $$\frac{^{n+1)}1}{n}-\frac{^{n)}1}{n+1}=\frac{n+1}{n(n+1)}-\frac{n}{n(n+1)}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)};$$

b) $$\frac{^{n+k)}1}{n}-\frac{^{n)}1}{n+k}=\frac{n+k}{n(n+k)}-\frac{n}{n(n+k)}=\frac{n+k-n}{n(n+k)}=\frac{k}{n(n+k)};$$

c) $$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{110}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{10\cdot 11}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}...+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}=\frac{1}{1}-\frac{1}{11}=\frac{10}{11};$$

d) $$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{2019\cdot 2021}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+...+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2019}-\frac{1}{2021}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2021}\right)=\frac{1010}{2021}$$

Soluție ex.10:

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{15}\Leftrightarrow\frac{a}{b}-1=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{15}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{14}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{b}-1=\frac{17}{2\cdot 15}+\frac{17}{3\cdot 14}+\frac{17}{4\cdot 13}+\frac{17}{5\cdot 12}+\frac{17}{6\cdot 11}+\frac{17}{7\cdot 10}+\frac{17}{8\cdot 9}$$

$\Leftrightarrow\frac{a-b}{b}=17\cdot\left(\frac{1}{2\cdot 15}+\frac{1}{3\cdot 14}+\frac{1}{4\cdot 13}+\frac{1}{5\cdot 12}+\frac{1}{6\cdot 11}+\frac{1}{7\cdot 10}+\frac{1}{8\cdot 9}\right)$. Cum numitorul comun din paranteză nu conține factorul 17 rezultă că $(a-b)\vdots 17$.

Soluție ex.11:

Metoda a I-a

Este suficient să arăt că $x<y$ pentru că $x\cdot x<x\cdot y<y\cdot y$

$$x=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot...\cdot\frac{2021}{2022}<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot...\cdot\frac{2019}{2021}<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot...\cdot\frac{2020}{2021}=y$$

Am folosit inegalitatea $\frac{k}{k+1}<\frac{k+1}{k+2}$, de unde $\frac{1}{2}<\frac{2}{3},\frac{3}{4}<\frac{4}{5},...\frac{2019}{2020}<\frac{2020}{2021}$.

Metoda a II-a

$$a=x^2=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot...\cdot\frac{2021}{2022}\right)^2=\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot...\cdot\frac{2021^2}{2022^2}$$

$$b=xy=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot...\cdot\frac{2021}{2022}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot...\cdot\frac{2020}{2021}=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\right)\cdot...\cdot\left(\frac{2021}{2022}\cdot\frac{2020}{2021}\right)$$

$$c=y^2=\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot...\cdot\frac{2020}{2021}\right)^2=\frac{2^2}{3^2}\cdot\frac{4^2}{5^2}\cdot\frac{6^2}{7^2}\cdot...\cdot\frac{2020^2}{2021^2}$$

Este evident că: $\frac{1^2}{2^2}=\frac{1\cdot 1}{2\cdot 2}<\frac{1\cdot 1}{2\cdot 3}<\frac{1\cdot 2}{2\cdot 3}<\frac{2\cdot 2}{2\cdot 3}<\frac{2\cdot 2}{3\cdot 3}=\frac{2^2}{3^2}$.

La fel se deduc celelalte inegalități, de unde $a<b<c$

Soluție ex.12:

$$A=\frac{1212}{2020}=\frac{12\cdot\cancel{101}}{20\cdot\cancel{101}}=\frac{^{(4}12}{20}=\frac{3}{5}$$

$\Rightarrow$ numere naturale sunt fracții de forma $5k\cdot A$, deci $5\cdot 1\cdot A, 5\cdot 2\cdot A, ...5\cdot 404\cdot A\Rightarrow 404$ fracții.

Soluție ex.13:

$$S=\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+...+\frac{1}{1+2+3+4+...+2020}$$

$$S=\frac{1}{1}+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+\frac{2}{4\cdot 5}+...+\frac{2}{2020\cdot 2021}=1+2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2021}\right)=1+\cancel{2}\cdot\frac{2020}{\cancel{2}\cdot 2021}=1+\frac{2020}{2021}=\frac{4041}{2021}$$

Soluție ex.14:

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$

b)

$$\Rightarrow 1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}\cdot 1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{72}+\frac{1}{108}+\frac{1}{216}=etc$$

c) Dacă $p_1<p_2<\ldots<p_k$ numere prime

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_k}=1\Rightarrow p_2\cdot p_3\cdot\ldots\cdot p_k+p_1\cdot p_3\cdot\ldots\cdot p_k+\ldots+p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_{k-1}=p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot\ldots\cdot p_k$$

$$\Leftrightarrow p_k\left(p_2\cdot p_3\cdot\ldots\cdot p_{k-1}+p_1\cdot p_3\cdot\ldots\cdot p_{k-1}+\ldots+p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_{k-1}\right)+p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_{k-1}=p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot\ldots\cdot p_k$$

$$\Leftrightarrow p_k \mid p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_{k-1}$$

un rezultat evident fals!

Curiozități:

	Așa DA: Calculați voi!	**Așa NU:**
	$\frac{5^3+4^3}{5^3+1^3}=$	$\frac{5^{\cancel{3}}+4^{\cancel{3}}}{5^{\cancel{3}}+1^{\cancel{3}}}=\frac{5+4}{5+1}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$
	$\frac{15^3+8^3}{15^3+7^3}=$	$\frac{15^{\cancel{3}}+8^{\cancel{3}}}{15^{\cancel{3}}+7^{\cancel{3}}}=\frac{15+8}{15+7}=\frac{23}{22}$
	$\frac{3544}{7531}=$	$\frac{3\cancel{5}44}{7\cancel{5}31}=\frac{344}{731}^{(43}=\frac{8}{17}$
	$\frac{143185}{17018560}=$	$\frac{143\cancel{18}5}{170\cancel{18}560}=\frac{1435}{170560}$
	$\frac{2666}{6665}=$	$\frac{266\cancel{6}}{\cancel{6}665}=\frac{26\cancel{6}}{\cancel{6}65}=\frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5}=\frac{2}{5}$
	În scrierea fiecărui dintre fracțiile de mai jos s-au utilizat toate cele 9 cifre nenule: $91\frac{7524}{836}, 91\frac{5823}{647}, 94\frac{1578}{263}, 96\frac{2148}{537}$ și $96\frac{1428}{257}$. Verificați dacă aceste numere sunt egale.	
	Rezultate amuzante puteți obține (eventual utilizând un calculator de buzunar cu un afișaj de 16 cifre) calculând perioadele numerelor zecimale: $\frac{1}{81}, \frac{1}{891}, \frac{1}{8991}$	
	Verificați și afirmația: ”Perioada fiecăruia dintre numerele $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ este alcătuită din aceleași cifre, dar scrise în altă ordine”	

Profesorul:
-Gigel, poți să-mi spui cât fac o optime plus o pătrime?
-Exact nu știu, dar prea mult n-are cum să fie!